

УДК 539.37

РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК**М.С. ГАНЕЕВА, В.Е. МОИСЕЕВА, З.В. СКВОРЦОВА***Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань**E-mail: ganeeva@kfti.knc.ru***DISCONTINUOUS SOLUTIONS IN THE NONLINEAR THEORY OF PLATES AND SHELLS****M.S. GANEEVA, V.E. MOISEEVA, Z.V. SKVORTSOVA***Institute of Mechanics and Engineering KazSC RAS, Kazan***Аннотация**

В работе представлены численные результаты исследования изгиба и устойчивости сферических сегментов и круглых пластин, находящихся под действием давления нагретой или охлажденной сжимаемой жидкости (рабочей среды взрывоопасного аппарата). Рассмотрены случаи, когда рабочие температуры существенно отличаются от начальной температуры.

Ключевые слова: тонкостенные элементы, изгиб и устойчивость, давление жидкости, критическая температура.

Summary

Numerical results for the study of bending and stability of spherical segments and circular plates under a pressure of heated or cooled compressed liquid (the working environment of explosive device) have been presented. Cases, when the working temperature is significantly different from the initial temperature, have been considered.

Key words: thin-walled elements, bending and stability, pressure of liquid, critical temperature.

Введение.

В нелинейной теории пластин и оболочек многие задачи после достижения параметрами критических значений (точек бифуркации, предельных значений) имеют разрывные решения, что соответствует результатам экспериментальных исследований устойчивости тонкостенных элементов конструкций [1]. Процессы деформирования тонких пластин и оболочек усложняются в случае действия термосилового нагружения. В работе установлено, что в термосиловой задаче при учете влияния сжимаемости жидкости на давление на тонкие сферические сегменты и круглые пластины наблюдаются разрывные решения соответствующих нелинейных краевых задач.

1. Постановка задачи и метод решения.

Рассматриваются нелинейный изгиб и устойчивость тонкого сферического сегмента под действием давления жидкости с выпуклой стороны оболочки. Невесомая сжимаемая жидкость находится в герметически закрытой емкости с жесткими стенками (рис.1). Давление в емкости создается медленной подачей жидкости. Характеристики сферического сегмента: R — радиус сферы, h — толщина, H_0 — глубина полюса по отношению к основанию, a — радиус основания. Вводятся координатные линии: меридианы $s, 0 \leq s \leq s_N$; внешняя нормаль z к срединной поверхности, $-h/2 \leq z \leq h/2$; $r = R \sin \theta$ — радиус параллели, $0 \leq \theta \leq \theta_N$ — угол между осью вращения x и нормалью z . Характеристики жидкости: M_0, V_0, p_0, T_0 — масса, объем, давление и температура в ненапряженном состоянии сегмен-

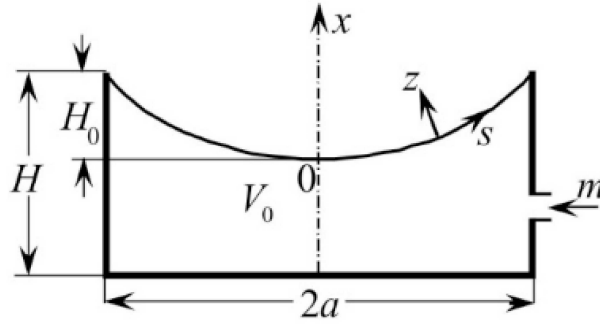


Рис. 1: Сферический сегмент

та; m, V, p, T — масса дополнительно поданной в емкость жидкости, соответствующее изменение объема емкости, установившиеся в ней давление и температура. Температура сегмента совпадает с температурой жидкости.

Принимается, что давление p в емкости в процессе всего нагружения изменяется по адиабатическому закону [2]:

$$p = p_0 \left(\frac{1 + m/M_0}{1 + V/V_0} \right)^\gamma, \quad (1)$$

где γ — показатель адиабаты. Таким образом, в данной задаче параметром нагружения будет служить масса подаваемой в емкость жидкости m .

Используются соотношения термосиловой задачи теории оболочек, описывающие моментное, геометрически и физически нелинейное напряженно-деформированное состояние (НДС) при умеренных поворотах [3] под действием давления на оболочку $P = p - p_0$ и разности температур $T - T_0$. При существенном отличии рабочих температур мембраны от начальной температуры T_0 возникает необходимость учета зависимости свойств материала от действующей температуры T . При этом в соотношениях термосиловой задачи нужно использовать средний коэффициент линейного температурного расширения в интервале $[T_0, T]$ [4]. Зависимость напряжений от деформаций представляется по теории малых упругопластических деформаций [5] для сжимаемого материала с диаграммой линейного упрочнения с коэффициентом упрочнения λ , модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , пределом текучести σ_S , средним коэффициентом линейного температурного расширения $\tilde{\alpha}$. В соотношениях задачи учтена зависимость характеристик материала от температур T_0, T :

$$E = E(T), \sigma_S = \sigma_S(T), \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(T_0, T). \quad (2)$$

Для вектора разрешающих функций [6] $Y = (T_{11}^*, Q_1^*, M_{11}, P, u, w, \vartheta_1, B)'$, где T_{11}^*, Q_1^* — меридиональное и перерезывающее усилия, M_{11} — изгибающий момент, u — касательное перемещение, ϑ_1 — поворот нормали, $B(s)$ — функция изменения объема из-за прогиба оболочки $w(s)$:

$$B(s) = 2\pi \int_0^s w r ds, B(0) = 0, B(s_N) = V, \quad (3)$$

получена нелинейная разрешающая система уравнений:

$$\frac{dY}{ds} = A(s) Y + F(s, Y) + \Delta T(s), 0 \leq s \leq s_N. \quad (4)$$

Здесь $A(s)$ — матрица коэффициентов размерности 8×8 , $F(s, Y)$ — вектор геометрически и физически нелинейных членов 8×1 , $\Delta T(s)$ — вектор температурных членов 8×1 , содержащий выражения $\tilde{\alpha}(T - T_0)$.

У основания оболочки $s = s_N$ рассматриваются условия жесткой заделки:

$$u = 0, w = 0, \vartheta_1 = 0. \quad (5)$$

К условиям при $s = s_N$ добавляется нелинейная зависимость между неизвестными P и V , приближенно следующая из (1) с учетом (3):

$$P + p_0(1 + m/M_0)^\gamma V/V_0 = -p_0 + p_0(1 + m/M_0)^\gamma \cdot [1 + \gamma(\gamma + 1)(V/V_0)^2/2 - \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)(V/V_0)^3/6]. \quad (6)$$

В работе [6] предложен алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи (4)–(6) на основе пошагового процесса по параметру $m_l/M_0, l = 1, 2, \dots, L$. При численном решении задачи вместо (6) может быть реализован крайний случай нагружения, когда задано изменение объема оболочки в процессе деформации:

$$V_{i+1} = V_i + \Delta V, i = 1, 2, \dots, J. \quad (7)$$

Далее приводятся результаты расчетов, в которых p_0 принимается равным атмосферному давлению, $T_0 = 20^\circ C$.

2. НДС сферического сегмента.

При вычислениях принято (рис. 1): $a = 100$ мм, $h = 0,3$ мм, $H_0 = 18$ мм, $H = 2H_0$, $s_N = 102,147$ мм, $\gamma = 7$, $\nu = 0,3$, $\lambda = 0,9$. Материал сегмента – нержавеющая сталь 12X18H10T; $E_0 = 2,03 \cdot 10^5$ МПа.

На рис. 2 представлены зависимости параметра нагрузки P/E_0 от прогиба в полюсе w/h для температур $T = -250, 20, 500^\circ C$. Сплошными линиями представлены данные для граничных условий (5), (7), когда нет учета влияния сжимаемости жидкости на давление (6). Наблюдаются нагрузки волнообразования по параллели P_H и верхние предельные нагрузки P_B . При решении задач с учетом условия (6) с ростом подачи жидкости в емкость m/M_0 оболочки выворачиваются хлопком со значительным снижением давления P_c и увеличением прогибов и напряжений. Пути хлопков изображены штриховыми линиями.

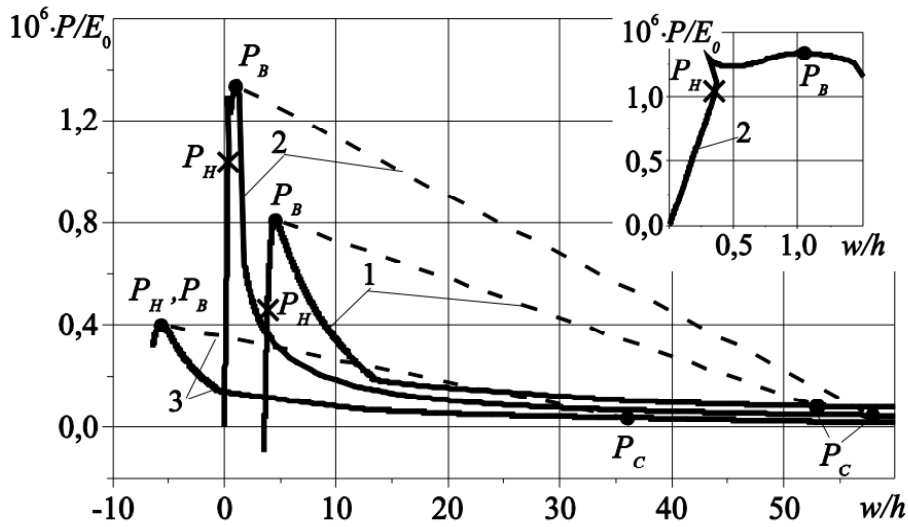


Рис. 2: Зависимости $P(w)$ в полюсе сегмента: 1 – $T = -250^\circ C$; 2 – $T = 20^\circ C$; 3 – $T = 500^\circ C$.

3. НДС круглой пластины.

При вычислениях принято (рис. 1): $a = 25\text{ мм}$, $h = 1\text{ мм}$, $H_0 = 0$, $\gamma = 7$, $\nu = 0,3$, $\lambda = 0,9$. Материал пластины – титановый сплав ВТ5-1, $E_0 = 1,09 \cdot 10^5$ МПа. При этих данных пластина теряет устойчивость от сжимающих усилий [7]:

$$T_{11}^{crit} = T_{22}^{crit} = -1,223 \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)a^2}.$$

Усилия при постоянной температуре T равны [3]:

$$T_{11}^{temp} = T_{22}^{temp} = -Eh \frac{\tilde{\alpha}}{1-\nu} (T - T_0).$$

Тогда для рассматриваемой пластины при зависимости характеристик материала от температур (2) критическая температура будет:

$$T^{crit} = 1,223 \frac{1}{\tilde{\alpha}(1+\nu)} \frac{h^2}{a^2} + T_0 = 188,4^\circ\text{C}. \quad (8)$$

На рис. 3а приведены зависимости параметра нагрузки P/E_0 от прогиба в полюсе w/h при $H = a$, граничных условиях (5), (6). Видно монотонное поведение кривых $P(w)$ при температурах $T = -196, 20, 180^\circ\text{C}$, меньших критической температуры (8). Отмечены точки, в которых интенсивность напряжений $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}$ достигает некоторых характерных значений. Вычисления показали, что при граничных условиях (5), (7) зависимости $P(w)$ на рис. 3а не изменяются.

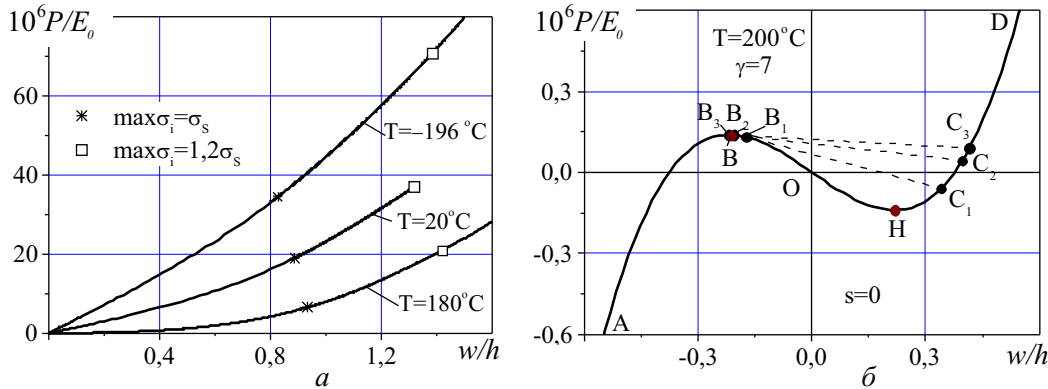


Рис. 3: Зависимости $P(w)$ в полюсе пластины для разных температур.

Картина НДС изменяется для температуры, большей критической (8). На рис.3б показана зависимость $P(w)$, полученная при различных условиях нагружения (6), (7), различных размерах емкости H/a , температуре $T = 200^\circ\text{C}$. Сплошная линия соответствует нагружению (7), при котором не учитывается взаимодействие пластины со сжимаемой средой. Ветви этого гладкого решения $OB_1B_2B_3BA$ ($V \leq 0$) и $OHC_1C_2C_3D$ ($V \geq 0$) антисимметричны относительно начала координат и имеют экстремальные точки В и Н. При учете взаимодействия со сжимаемой средой (6), $m/M_0 \geq 0$ решение развивается со скачком с левой ветви на правую: для $H=0,2a$ – $OB_1C_1C_2C_3D$, для $H=0,5a$ – $OB_1B_2C_2C_3D$, для $H=a$ – $OB_1B_2B_3C_3D$. При меньшем объеме нагружающей среды скачок происходит к более близкой точке на сплошной кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука. Физматлит, 1967. — 984 с.
2. **Ильгамов М.А.** Статические задачи гидроупругости. — Казань: Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, 1994. — 208 с.
3. **Ганеева М.С.** Термосиловая задача в геометрически и физически нелинейной теории нетонких и тонких оболочек. — Казань: КФТИ КФАН СССР, 1985. — 126 с. Деп. в ВИНТИ 24.06.85, № 4459-85Деп.
4. **Ганеева М.С., Косолапова Л. А.** О соотношениях закона Гука в температурной задаче упругого твердого тела // Труды XVII Межд. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. — Казань: Изд-во Казанск. гос. ун-та, 1996. — С.33–37.
5. **Ильюшин А.А.** Пластичность. Ч.I. Упругопластические деформации. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. — 376 с.
6. **Ганеева М.С., Ильгамов М.А., Моисеева В.Е.** Устойчивость сферического сегмента, нагруженного давлением сжимаемой жидкости // Проблемы прочности и пластичности. Межвузовский сборник. — Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. — Вып. 71. — С. 71–76.
7. **Тимошенко С.П.** Устойчивость упругих систем. — М.: Гостехтеориздат, 1955. — 567 с.

REFERENCES

1. **Vol'mir A.S.** Stability of deformable systems [Ustojchivost' deformiruemykh sistem]. — Moscow: Nauka. Fizmatlit, 1967. — 984 p. (in Russian)
2. **Il'gamov M.A.** Static problems of hydroelasticity [Staticheskie zadachi gidrouprugosti]. — Kazan: Institut mekhaniki i mashinostroenija, KazNTS RAN, 1994. — 208 p. (in Russian)
3. **Ganeeva M.S.** Temperature problem in geometrically and physically nonlinear theory of non-thin and thin shells [Termosilovaja zadacha v geometricheski i fizicheski nelinejnoj teorii netonkikh i tonkikh obolochek] / KFTI KFAN SSSR. Kazan, 1985. — 126 p. Dep. in VINITI 24.06.85, №4459-85Dep. (in Russian)
4. **Ganeeva M.S., Kosolapova L. A.** On the relations of Hook's law in the temperature problem of elastic solids [O sootnoshenijakh zakona Guka v temperaturnoj zadache uprugogo tverdogo tela] // Trudy XVII Mezhd. konf. po teorii obolochek i plastin. V. 1. — Kazan: Izdatel'stvo Kazanskogo gos. universiteta, 1996. — P. 33–37. (in Russian)
5. **Il'jushin A.A.** Plasticity. Part 1. Elastic-plastic deformation [Plastichnost'. Ch.I. Uprugoplasticheskie deformatsii]. — Moscow-Leningrad: Gostekhtheorizdat, 1948. — 376 p. (in Russian)
6. **Ganeeva M.S., Il'gamov M.A., Moiseeva V.E.** Stability of a spherical segment loaded by the pressure of a compressible liquid [Ustojchivost' sfericheskogo segmenta, nagruzhennogo davleniem szhimaemoj zhidkosti] // Problemy prochnosti i plastichnosti. Mezhvuzovskij sbornik. — Nizhnij Novgorod: Izdatel'stvo NNGU, 2009. — № 71. — P. 71–76. (in Russian)
7. **Timoshenko S.P.** Stability of elastic systems [Ustojchivost' uprugikh sistem]. — Moscow: Gostekhtheorizdat, 1955. — 567 p. (in Russian)